تمرین سری دوم | **فضای برداری و گراف‌ها** | تاریخ تحویل: ۸/۶

۱. فرض کنید V و W فضاهایی خطی با بردار متناهی هستند و T نگاشتی خطی از V به W است. ثابت‌کنید پایه‌های B_V و B_W از به ترتیب V و W وجود دارند به طوریکه اگر ماتریس نگاشت با تبدیل پایه B_V به B_W را $M(T)$ در نظر بگیریم $M(T)$ همه درایه‌هایش صفر هست به‌جز درایه‌های $M(T)_{i,i}$ به ازای $1 \leqslant i \leqslant dim(R(T))$ و در این درایه‌ها برابر ۱ است.

۲. الف) فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ است. ثابت کنید درایه i,j از ماتریس A^3 به فرم زیر می‌باشد:

$$(A^3)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} A_{i,k}A_{k,l}A_{l,j} \tag{1}$$

ب) نتیجه (۱) را تعمیم دهید و ثابت‌کنید:

$$(A^n)_{i,j} = \sum_{<k_1,k_2,k_3,\dots,k_n>} (A_{k_1,k_2}A_{k_2,k_3}A_{k_3,k_4}\dots A_{k_{n-1},k_n}) \tag{2}$$

به طوری‌که دنباله $< k_1, k_2, \dots, k_n >$ دنباله‌ای دلخواه از اعداد ۱ تا n است به طوری‌که $k_1 = i$ است و $k_n = j$ و عبارت (۲) در واقع جمعی برروی تمامی دنباله‌هایی با چنین شرط است.

ج) با استفاده از نتایج به‌دست آمده در بخش‌های قبل ثابت کنید اگر A ماتریس مجاورت گرافی ساده مثل G باشد، آن‌گاه تعداد گشت‌ها از i به j برابر است با $(A^n)_{i,j}$

- ماتریس مجاورت گراف G با n رأس یک ماتریس $n \times n$ است به طوری‌که $A_{i,j} = 1$ است اگر و تنها اگر یالی بین رأس i و j در گراف وجود داشته‌باشد و در غیر اینصورت برابر ۰ است.
- یک گشت به طول x در گراف G دنباله‌ای از رئوس است به طوری‌که هر دو رأس متوالی آن در این دنباله توسط یالی به‌هم متصل شده‌اند.

۳. گراف G با n رأس و m یال مفروض است. می‌خواهیم روی تمامی رئوس و یال‌های این گراف اعداد ۰, ۱ قرار دهیم به طوری‌که شرایط زیر برقرار باشد.

اگر عدد روی هر رأس مثل v را با x_v نشان دهیم و عدد روی یالی مثل uv را با x_{uv} نشان دهیم. داشته‌باشیم:

- به ازای هر یال مثل uv، داشته‌باشیم $x_{uv} = x_u \oplus x_v$ (علامت به کار رفته علامت XOR است.)
- به ازای هر دور در گراف مثل $< v_1, v_2, \dots, v_k, v_1 >$ داشته‌باشیم:

$$x_{v_1v_2} \oplus x_{v_2v_3} \oplus \dots \oplus x_{v_kv_1} = 0$$

- به ازای هر رأس مثل v و تمامی یال‌های مجاورش به فرم $\{uv_1, uv_2, \dots, uv_k\}$ داشته‌باشیم:

$$x_{uv_1} \oplus x_{uv_2} \oplus \dots \oplus x_{uv_k} = 0$$

با استفاده از متدهای جبر خطی الگوریتمی از $\mathcal{O}((n+m)^۳)$ ارائه دهید که با ورودی گرفتن شکل گراف تعداد روش‌های مقدار دهی به رئوس و یال‌ها را بشمارد به طوری‌که قوانین بالا برقرار باشند.

راهنمایی: می‌توانید فضای خطی‌ای تعریف کنید که در آن به جای اعداد حقیقی اعداد صفر و یک را داریم و در آن جمع دو عدد همان XOR آن‌هاست و ثابت کنید چنین فضایی خطی است. سپس به مشابهت‌های قوانین بالا با قوانین کیرشهف بپردازید و نهایتا با مدل‌سازی‌های ارائه شده در کلاس الگوریتم مورد نظر را پیدا کنید.

۴. الف) فضای برداری مختلط $C^۳$ را در نظر بگیرید و زیر مجموعه‌ی آن M می‌باشد که شامل بردارهایی به صورت (α, β, γ) می‌باشد که:

- $\alpha = ۰$
- $\beta + \alpha = ۱$
- $\beta + \alpha \geqslant ۰$
- $\alpha \in R$

در کدام یک از حالت‌های بالا M زیرمجموعۀای از C می‌باشد.

ب) آیا ممکن است ۲ زیر مجموعه‌ی مجزا از فضای $R^۲$ که هر کدام دارای ۲ بردار هستند، اسپن یکسانی داشته باشند؟

۵. الف) اگر $\{x_۱, x_۲, ..., x_n\}$و $\{y_۱, y_۲, ..., y_n\}$پایه‌های فضای برداری باشند. xو yرا به صورت زیر تعریف می‌کنیم. چه ارتباطی بین بردارهای x و y وجود دارد؟

$$x = \alpha_۱ x_۱ + ... + \alpha_n x_n$$

$$y = \beta_۱ y_۱ + ... + \beta_n y_n$$

ب) اگر $\{x_۱, x_۲, ..., x_n\}$و $\{y_۱, y_۲, ..., y_n\}$پایه‌های فضای برداری باشند. اگر

$$\alpha_۱ x_۱ + ... + \alpha_n x_n = \beta_۱ y_۱ + ... + \beta_n y_n$$

چه ارتباطی بین αو β وجود دارد؟

۶. اثبات کنید اجتماع ۳ زیرفضا از فضای V یک زیرفضای V اگر و فقط اگر یکی از زیرفضاها شامل ۲ زیرفضای دیگر باشد.

۷. فضای برداری V را در نظر بگیرید. با در نظر گرفتن این ویژگی کوچکترین اسپن $E \subset V$:
اگر $E' \subset E$ و $span(E) = V$ پس $E' = E$
اثبات کنید زیر مجموعه‌ای مانند $E \subset V$ که V را اسپن می‌کند پس $span(E) = V$ و دارای ویژگی بالا است، یک پایه برای V می‌باشد.

۸. فرض کنید G گرافی‌است همبند، با $n \leqslant ۴$ رأس و m یال به طوری‌که یال‌هایش وزن‌دار و وزن یال‌هایش حقیقی است. همچنین می‌دانیم جمع وزن همه دورهای آن برابر صفر است.

یک فضای برداری متناسب با وزن‌های روی این گراف این گراف به این صورت تعریف می‌کنیم که بردارهای آن mتایی هایی هستند که مؤلفه iام هر بردار آن متناظر وزن نوشته‌شده روی یال iام می‌باشد. عملیات جمع و ضرب اسکالر روی این گراف‌ها را متناظر با عمل جمع یا ضرب اسکالر در فرم برداری آن‌ها می‌کنیم، یعنی $\alpha W_۱(G) + \beta W_۲(G)$ وزن گذاری‌ای روی گرافG است که اگر در وزن‌گذاری اول وزن یالی دلخواه مثل uv برابر $W_{۱_{uv}}$ باشد و در وزن‌گذاری دوم $W_{۲_{uv}}$ باشد، در وزن‌گذاری $\alpha W_۱ + \beta W_۲$ برابر $\alpha W_{۱_{uv}} + \beta W_{۲_{uv}}$ است.

الف) ثابت کنید اگر $S(G)$ را مجموعه تمامی گراف‌ها با این خصوصیات بنامیم (که جمع وزن روی هر دور از آن صفر باشد) آنگاه $S(G)$ یک فضای خطی است.

ب) ثابت کنید به ازای هر گراف G داریم:

$$dim(S(G)) \leqslant n - ۱$$

ج) ثابت کنید گرافی مثل G وجود دارد که

$$dim(S(G)) = ۰$$